

7장 역미분 연습문제 해답

7.1 개요

7.2 치환적분법

1. $u = x^2$ 이라고 하면, $du = 2xdx$ 이고 그러면 $\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$
2. $u = 3x^2 + 7$ 이라고 하면, $du = 6xdx$ 이고 그러면 $\frac{1}{6} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{9} (3x^2 + 7)^{3/2} + C$
3. $u = 3 + 5x$ 라고 하면, $du = 5dx$ 이고 그러면 $\frac{1}{5} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{15} (3 + 5x)^{3/2} + C$
4. $u = 3 + 7x$ 라고 하면, $du = 7dx$ 이고 그러면 $\frac{1}{7} \int 1/\sqrt{u} du = \frac{2}{7} \sqrt{u} + C = \frac{2}{7} \sqrt{3 + 7x} + C$
5. $u = \tan x$ 라고 하면, $du = \sec^2 x dx$ 이고 그러면 $\int u^{14} du = \frac{1}{15} u^{15} + C = \frac{1}{15} \tan^{15} x + C$
6. $u = x+1$ 이라고 하면, $du = dx$ 이고 $x = u-1$ 이다. 그러면 $\int (u-2)/u^5 du = \int (u^{-4} - 2u^{-5}) du = \frac{u^{-3}}{-3} - 2 \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{3(x+1)^3} + \frac{1}{2(x+1)^4} + C$
7. $u = 1 + 2 \sec \theta$ 라고 하면, $du = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$ 이다. 그러면 $\int = \frac{1}{2} \int 1/\sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + C = \sqrt{1 + 2 \sec \theta} + C$
8. $u = \ln x$ 라고 하면, $du = 1/x dx$ 이다. 그러면 $\int 1/udu = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C$
9. $u = x^2$ 이라고 하면, $du = 2x dx$ 이다. 그러면 $\int x^3 \sin u du / 2x = \frac{1}{2} \int x^2 \sin u du = \frac{1}{2} \int u \sin u du = \frac{1}{2} (\sin u - u \cos u) + C = \frac{1}{2} (\sin x^2 - x^2 \cos x^2) + C$
10. $u = 1 + 3x$ 라고 하면, $du = dx$ 이다. 그러면 $\frac{1}{3} \int u^7 du = \frac{1}{24} u^8 + C = \frac{1}{24} (1 + 3x)^8 + C$
11. $u = 2 - 3x$ 라고 하면, $du = -3dx$ 이다. 그러면 $-\frac{1}{3} \int 1/udu = -\frac{1}{3} \ln |u| + C = -\frac{1}{3} \ln |2 - 3x| + C$
12. $u = 2 - x$ 라고 하면, $du = -dx$ 이다. 그러면 $-\int 1/u^3 du = 1/2u^2 + C = \frac{1}{2(2-x)^2} + C$
13. $u = \frac{1}{2}\theta - 1$ 이라고 하면, $du = \frac{1}{2}d\theta$ 이다. 그러면 $2 \int \cos u du = 2 \sin u + C = 2 \sin(\frac{1}{2}\theta - 1) + C$
14. $u = -x$ 이라고 하면 $du = -dx$ 이다. 그러면 $\int (-u)e^u \cdot (-du) = \int ue^u du = e^u(u - 1) + C$
(공식 61) $= e^{-x}(-x - 1) + C$
15. $u = \cos x$ 라고 하면, $du = -\sin x dx$ 이다. 그러면 $-\int u^3 du = -\frac{1}{4} u^4 + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

16. $u = -x$ 라고 하면 $du = -dx$ 이다. 그러면 $-\int e^u du = -e^u + C = -e^{-x} + C$
17. $u = 3x$ 라고 하면, $du = 3dx$ 이다. 그러면 $\int \frac{1}{3} \sin u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{9} \int u \sin u du = \frac{1}{9} (\sin u - u \cos u) + C$
(공식 48) $= \frac{1}{9} (\sin 3x - 3x \cos 3x) + C$
18. $u = \pi x$ 라고 하면, $du = \pi dx$ 이다. 그러면 $(1/\pi) \int \sin^2 u du = (1/\pi) \frac{1}{2} (u - \sin u \cos u) + C$ (공식 39) $= (1/2\pi) (\pi x - \sin \pi x \cos \pi x) + C$
19. $3 \int x \sin x dx = 3(\sin x - x \cos x) + C$ (공식 48)
20. $x = 3x$ 라고 하면, $du = 3dx$ 이다. 그러면 $\int (\frac{1}{3}u)^2 \cos u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{27} \int u^2 \cos u du$ (공식 51)
 $= \frac{1}{27} [(u^2 - 2) \sin u + 2u \cos u] + C = \frac{1}{27} (9x^2 - 2) \sin 3x + \frac{6}{27} \cos 3x + C = \frac{1}{27} (9x^2 - 2) \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 3x + C$
21. $u = 2x + 3$ 라고 하면, $du = 2dx$ 이다. 그러면 $\frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2} (u \ln u - u) + C$ (공식 62) $= \frac{1}{2} (2x + 3) \ln(2x + 3) - \frac{1}{2} (2x + 3) + C$
22. $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$ (공식 33)
23. 맞지 않다. 첫 번째 단계는 문제가 없으나 두 번째 단계에서는 $u = \sqrt{3}x$ 로 놓으면 $du = \sqrt{3}dx$ 이고, 그러면
- $$\int \frac{1}{1 + (\sqrt{3}x)^2} dx = \int \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} u + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \sqrt{3}x + C$$
24. (a) $u = 3x$ 라고 하면, $du = 3dx$ 이다. 그러면 $\frac{1}{3} \int \tan^{-1} u du = \frac{1}{3} (u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1 + u^2)) + C$
(공식 59) $= x \tan^{-1} 3x - \frac{1}{6} \ln(1 + 9x^2) + C$
(b) 아직은 역도함수를 구하는 것이 불가능하다.
25. $u = \cos x$ 라고 하면, $du = -\sin x dx$ 이다. 그러면 $-\int 1/u du = -\ln |u| + C = -\ln |\cos x| + C$
- 26.
- $$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$
- 이제 $u = \sec x + \tan x$ 라고 하면, $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$ 이다. 그러면 $\int du/u = \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$
27. $\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

7.3 적분표를 이용한 역미분 I

1. $2 + 6x - x^2 = -(x^2 - 6x - 2) = -([x - 3]^3 - 11) = 11 - (x - 3)^2$. $u = x - 3$ 이라 하면, $du = dx$ 이다. 그러면

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 6x - x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{11 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{\sqrt{11}} + C = \sin^{-1} \frac{x - 3}{\sqrt{11}} + C$$

2. $x + 2x^2 = 2[(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}]$. $u = x + \frac{1}{4}$ 라 하면, $du = dx$ 이다. 그러면

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x + \frac{1}{4} + \sqrt{(x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}} \right| + C$$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{5}{3}} \right| + C$ (공식 27)

4.

$$\begin{aligned} \int \left(x^2 - 4 + \frac{2x+16}{x^2+4} \right) dx \text{ (긴 나눗셈)} &= \frac{x^3}{3} - 4x + 2 \int \frac{x}{x^2+4} dx + 16 \int \frac{1}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 4x + \ln(x^2+4) + 8 \tan^{-1} \frac{1}{2}x + C \end{aligned}$$

5. $\int x \sqrt{(x+1)^2 - 1} dx$. $u = x+1$ 이라고 하면, $du = dx$ 이다.

$$\begin{aligned} \int (u-1) \sqrt{u^2-1} du &= \int u \sqrt{u^2-1} du - \int \sqrt{u^2-1} du \\ &= \frac{1}{3}(u^2-1)^{3/2} - \frac{1}{2}u \sqrt{u^2-1} + \frac{1}{2} \ln |u + \sqrt{u^2-1}| + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+2x)^{3/2} - \frac{1}{2}(x+1) \sqrt{x^2+2x} + \frac{1}{2} \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + C \end{aligned}$$

6. 세 가지 방법으로 생각해 볼 수 있다.

- $\int \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2x+6} \right) = \frac{1}{2}x - 3 \cdot \frac{1}{2} \ln |2x+6| + C$
- $a=6, b=2$ 로 두고 공식 5를 사용하면 $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \ln |2x+6| + C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \ln |2x+6| + K$
- $u = 2x+6$ 이라고 하면, $du = 2dx$ 이다. 그러면 $\int \frac{1}{2}(u-6)/u (du/2) = \frac{1}{4} \int (1-6/u) du = \frac{1}{4}u - \frac{3}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{4}(2x+6) - \frac{3}{2} \ln |2x+6| + C$

7. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = x - \tan^{-1} x + C$

7.4 적분표를 이용한 역미분 II

1. (a) $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{2x+3}$

(b) $x^2 + 2x - 1$ 는 $(x - [-1 + \sqrt{3}])(x - [-1 + \sqrt{3}])$ 으로 인수분해 되지만, $x^2 - 2x + 2$ 는 $b^2 - 4ac < 0$ 이므로 인수분해가 되지 않는다. 따라서

$$\frac{A}{x - (-1 + \sqrt{3})} + \frac{B}{x - (-1 - \sqrt{3})} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 2}$$

2. (a) $\frac{12}{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})} = \frac{A}{x + \sqrt{3}} + \frac{B}{x - \sqrt{3}}$ 로 두면 $12 = A(x - \sqrt{3}) + B(x + \sqrt{3})$ 이다. $x = \sqrt{3}$ 이면 $12 = 2\sqrt{3}B$ 로부터 $B = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 이다. $x = -\sqrt{3}$ 이면 $12 = -2\sqrt{3}A$ 로부터 $A = -2\sqrt{3}$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\frac{-2\sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{x - \sqrt{3}}$.

(b) $\frac{1}{(x-4)(2x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{2x+3}$ 로 두면 $1 = A(2x+3) + B(x-4)$ 이다. $x = 4$ 이면 $1 = 11A$ 로부터 $A = 1/11$ 이다. $x = -3/2$ 이면 $1 = -\frac{11}{2}B$ 로부터 $B = -2/11$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\frac{1/11}{x-4} - \frac{2/11}{2x+3}$

(c) $\frac{5x}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}$ 로 두면 $5x = (Ax+B)(x-2) + C(x^2+1)$ 이다. $x = 2$ 이면 $10 = 5C$ 로부터 $C = 2$ 이다. x^2 의 계수를 서로 같게 두면 $0 = A + C$ 로부터 $A = -2$

이다. x 의 계수를 서로 같게 두면 $5 = B - 2A$ 로부터 $B = 1$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\frac{-2x+1}{x^2+1} + \frac{2}{x-2}$.

- (d) $\frac{2x+3}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$ 로 두면 $2x+3 = A(x-2) + B$ 이다. $x = 2$ 이면 $7 = B$ 이다. x 의 계수를 서로 같게 두면 $2 = A$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\frac{2}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2}$

3. (a) $\frac{3}{(2-x)(x+1)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{x+1}$ 로 두면 $3 = A(x+1) + B(2-x)$ 이다. $x = 2$ 이면 $3 = 3A$ 로부터 $A = 1$ 이다. $x = -1$ 이면 $3 = 3B$ 로부터 $B = 1$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x}$ 이다. 역도함수는 $-\ln|2-x| + \ln|x+1| + C$

- (b) $\int \frac{3dx}{-x^2+x+2}$ 에 대해 $a = -1, b = 1, c = 2$ 로 보고 공식 1(a)를 사용하면 역도함수는 $\ln \left| \frac{-2x+1-3}{-2x+1+3} \right| + C = \ln \left| \frac{-x-1}{2-x} \right| + C = \ln \left| \frac{x+1}{2-x} \right| + C = \ln|x+1| - \ln|2-x| + C$

4. (a) 주어진 식을 $2 \int \frac{xdx}{x^2-4x+4} + 3 \int \frac{dx}{x^2-4x+4}$ 와 같이 쓸 수 있고 공식 2와 공식 1(c)를 사용하거나 (문제 2(d)와 같이) $\frac{2}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2}$ 로 부분분수분해할 수 있다. 그러므로 역도함수는 $2\ln|x-2| - 7/(x-2) + C$

- (b) $\frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{8x}{(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ 로 두면 $8x = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$ 이다. $x = 1$ 이면 $8 = 4B$ 로부터 $B = 2$ 다. $x = -1$ 이면 $-8 = -4A$ 로부터 $A = 2$ 다. x^3 의 계수를 비교하면 $0 = A + B + C$ 로부터 $C = -4$ 이다. x^2 의 계수를 비교하면 $0 = -A + B + D$ 로부터 $D = 0$ 이다. 따라서 부분분수분해는 $\frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4x}{x^2+1}$ 이다. 그러므로 역도함수는 $2\ln|x+1| + 2\ln|x-1| - 2\ln(x^2+1) + C$

- (c) 공식 10을 사용하거나 $\frac{-2/9}{x} - \frac{1/3}{x^2} + \frac{4/9}{2x-3}$ 로 부분분수분해한다. 따라서 역도함수는 $-\frac{2}{9}\ln|x| + \frac{1}{3x} + \frac{2}{9}\ln|2x-3| + C$

5. $\frac{1}{x(a+bx)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+bx} + \frac{C}{(a+bx)^2}$ 로 두면, $1 = A(a+bx)^2 + Bx(a+bx) + Cx$ 이다. $x = 0$ 이면 $1 = a^2A$ 로부터 $A = 1/a^2$ 이다. $x = -a/b$ 이면 $1 = -(a/b)C$ 로부터 $C = -b/a$ 이다. x^2 의 계수를 비교하면 $0 = b^2A + bB$ 로부터 $B = -b/a^2$ 이다. 따라서 주어진 적분은

$$\frac{1}{a^2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{b}{a^2} \int \frac{1}{a+bx} dx - \frac{b}{a} \int \frac{1}{(a+bx)^2} dx$$

이고 역도함수는

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \ln|x| - \frac{1}{a^2} \ln|a+bx| + \frac{1}{a} \frac{1}{a+bx} + C &= -\frac{1}{a^2} (\ln|a+bx| - \ln|x|) + \frac{1}{a(a+bx)} + C \\ &= -\frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + \frac{1}{a(a+bx)} + C \end{aligned}$$

6. 긴 나눗셈을 하면 $\frac{x^2}{x^2+5x+4} = 1 - \frac{5x+4}{x^2+5x+4}$ 이므로 주어진 적분은

$$\int \frac{x^2}{x^2+5x+4} dx = \int dx - 5 \int \frac{xdx}{x^2+5x+4} - 4 \int \frac{dx}{x^2+5x+4}$$

첫 번째 적분은 x 이고, 두 번째 적분은 $a = 1, b = 5, c = 4$ 로 두고 공식 2를 사용하거나 분모를 인수분해하고 부분분수분해를 하여 역도함수를 구하면

$$-5 \cdot \frac{1}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| + \frac{5 \cdot 5}{2} \int \frac{1}{x^2 + 5x + 4} dx$$

이다. 이것에 첫 번째 적분 결과와 세 번째 항을 더하면

$$\begin{aligned} & x - \frac{5}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| + \frac{17}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 5x + 4} \\ &= x - \frac{5}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| + \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2x + 5 - 3}{2x + 5 + 3} \right| \\ &= x - \frac{5}{2} \ln |x^2 + 5x + 4| + \frac{17}{6} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 4} \right| \\ &= x - \frac{5}{2} \ln |x + 4| |x + 1| + \frac{17}{6} \ln \left| \frac{x + 1}{x + 4} \right| \\ &= x - \frac{5}{2} \ln |x + 4| - \frac{5}{2} \ln |x + 1| + \frac{17}{6} \ln |x + 1| - \frac{17}{6} \ln |x + 4| \\ &= x + \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{16}{3} \ln |x + 4| \end{aligned}$$

7.5 부분적분법

1. (a) $u = x, dv = e^x dx$ 라고 두면, $du = dx, v = e^x$ 이고 $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$

(b) $u = \tan^{-1} x, dv = dx$ 라고 두면, $du = dx/(1 + x^2), v = x$ 이고 $\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int x/(1 + x^2) dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

(c) $u = \sin^{-1} x, dv = dx$ 라고 두면, $du = dx/\sqrt{1 - x^2}, v = x$ 이고 $\int \sin^{-1} x dx = x \sin^{-1} x - \int x/\sqrt{1 - x^2} dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$.

(d) $u = \ln x, dv = dx$ 라고 두면, $du = dx/x, v = x$ 이고 $\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

2. (a) $u = \cos(\ln x), dv = dx$ 라고 두면, $du = -\sin(\ln x) \cdot (1/x) dx, v = x$ 이고 $\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$ 이다. 이제 $u = \sin(\ln x), dv = dx$ 라고 두면 $du = \cos(\ln x) \cdot (1/x) dx, v = x$ 이고 $\int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx$ 이다. 항들을 모아서 정리하면 $2 \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x)$ 이고 따라서

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{1}{2} x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

(b) $u = x^2, dv = e^x dx$ 라고 두면, $du = 2x dx, v = e^x$ 이고 $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$ 이다. 이제 공식 61을 사용하거나 다시 부분적분을 이용하면 $u = x, dv = e^x dx$ 로 두고 $du = dx, v = e^x$ 이므로

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x + C$$

(c) $u = \tan^{-1} x, dv = x dx$ 라고 두면, $du = dx/(1+x^2), v = \frac{1}{2}x^2$ 이고

$$\begin{aligned}\int x \tan^{-1} x dx &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C\end{aligned}$$

3. $u = \sec x, dv = \sec^2 x dx$ 라고 두면 $du = \sec x \tan x dx, v = \tan x$ 이다.

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln |\sec x + \tan x|\end{aligned}$$

따라서 $2 \int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|$. $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$.

4. $u = x, dv = xe^{-x^2} dx$ 라고 두면, $du = dx, v = \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. 그러면

$$\int x^2 e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}xe^{-x^2} + \frac{1}{2}Q(x) + C$$

7.6 점화식

1. $u = x^n, dv = e^x dx$ 라고 두면 $du = nx^{n-1} dx, v = e^x$ 이고

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

2. $\int (\sec^2 x - 1) \tan^{n-2} x dx = \int \sec^2 x \tan^{n-2} x dx - \int \tan^{n-2} x dx$. 첫번째 적분에 대해서는 $u = \tan x$ 라고 하면 $du = \sec^2 x dx$ 이므로 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx$$

3. $u = (\ln x)^n, dv = dx$ 라고 두면, $du = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx, v = x$ 이므로 $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$ 이다. 이것을 이용하면

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^3 dx &= x(\ln x)^3 - 3 \int (\ln x)^2 dx \\ &= x(\ln x)^3 - 3[x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx] \\ &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6(x \ln x - x) + C\end{aligned}$$

4. 먼저 공식 52(a)를 이용하면 $\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx$ 를 얻는다. 마지막 적분에 대해 공식 52(b)를 적용한다. (공식 52(b)는 사인 제곱으로 m 을 사용하고 있으나 여기서는 사인은 $m-2$ 제곱이므로 공식을 적용할 때 m 대신 $m-2$ 를 사용해야

한다)

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \left[\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{m-2+n} + \frac{n-1}{m-2+n} \int \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x dx \right]$$

5. 새로 얻은 적분에서는 분자에 m 이 빠져있으므로 원래 식과 같은 형태가 아니기 때문이다.

6. (a) $u = \sin x$ 라고 하면 $du = \cos x dx$ 이고 $\int \sin x \cos x dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$
($u = \cos x$ 라고 두고 $du = -\sin x dx$ 와 같은 치환을 해도 된다.)

(b) $u = \cos x$ 라고 하면 $du = -\sin x dx$ 이고 $-\int u^{12} du = -\frac{1}{13}u^{13} + C = -\frac{1}{13}\cos^{13} x + C$

(c) $m=0, n=-5$ 로 두고 공식 52(c)를 사용하면 $\frac{-\sin x \cos^{-4} x}{-4} + \frac{-3}{-4} \int \sec^3 x dx$. 이제 공식 43을 사용하면 $\frac{1}{4}\sin x \sec^4 x + \frac{3}{4}[\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|] + C$

(d) 공식 53을 사용한다. $\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - (\tan x - x) + C$

(e) $u = \sin x$ 라고 하면 $du = \cos x dx$ 이고 $\int du/u^2 = -1/u + C = -1/\sin x + C$ 이다.

(f)

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx &= -\frac{\sin^3 x \cos^{-2} x}{-2} - \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \quad (\text{공식 52(c)}) \\ &= \frac{1}{2}\sin^3 x \sec^2 x - \frac{1}{2}(-\sin x + \int \sec x dx) \quad (\text{공식 52(a)}) \\ &= \frac{1}{2}\sin^3 x \sec^2 x - \frac{1}{2}(-\sin x + \ln|\sec x + \tan x|) + C \quad (\text{공식 33}) \end{aligned}$$

(g) 공식 52(b)를 한 번 사용하거나 또는 $\int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (u^4 - u^6) du$ ($u = \sin x$ 로 두는 치환) $= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

(h) $u = 3x$ 로 두면 $du = 3dx$. 그러면

$$\begin{aligned} \int \sin^4 3x dx &= \frac{1}{3} \int \sin^4 u du \\ &= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{4}\sin^3 u \cos u + \frac{3}{4} \int \sin^2 u du \right) \quad (\text{공식 52(a)}) \\ &= -\frac{1}{12}\sin^3 u \cos u + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u) + C \\ &= -\frac{1}{12}\sin^3 3x \cos 3x + \frac{1}{8}(3x - \sin 3x \cos 3x) + C \end{aligned}$$

7.

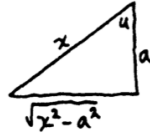
$$\begin{aligned} \frac{-\sin^2 x \cos^{99} x}{101} - \frac{2}{101(99)} \cos^{99} x &= \frac{-\cos^{99} x}{99} \left[\frac{99}{101} \sin^2 x + \frac{2}{101} \right] \quad (\sin^2 x = 1 - \cos^2 x) \\ &= -\frac{\cos^{99} x}{99} \left[1 - \frac{99}{101} \cos^2 x \right] \\ &= \frac{-\cos^{99} x}{99} + \frac{\cos^{101} x}{101} \end{aligned}$$

7.7 삼각 치환적분법

1. (아래 그림들을 참조한다)

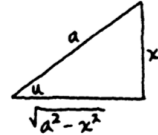
(a) $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan u$, $x = a \sec u$, $dx = a \sec u \tan u du$.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{a \tan u} a \sec u \tan u du &= \int \sec u du \\
 &= \ln |\sec u + \tan u| + C \quad (\text{공식 33}) \\
 &= \ln \left| \frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right| + C \\
 &= \ln \frac{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|}{a} + C \\
 &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| - \ln a + C \\
 &= \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + K
 \end{aligned}$$



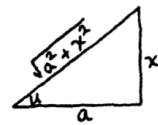
(b) $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$, $x = a \sin u$, $dx = a \cos u du$

$$\begin{aligned}
 \int a \cos u \cdot a \cos u du &= a^2 \int \cos^2 u du \\
 &= \frac{1}{2} a^2 (u + \sin u \cos u) + C \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \arcsin x/a + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C
 \end{aligned}$$



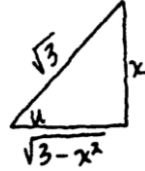
(c) $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec u$, $x = a \tan u$, $dx = a \sec^2 u du$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{a \sec u}{a \tan u} a \sec^2 u du &= a \int \frac{du}{\cos^2 u \sin u} \\
 &= a (\sec u + \int \csc u du) \quad (m = -1, n = -2 \text{로 두고 공식 52(c)}) \\
 &= a \sec u - a \ln |\csc u + \cot u| + C \quad (\text{공식 34}) \\
 &= \sqrt{a^2 + x^2} - a \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \frac{a}{x} \right| + C
 \end{aligned}$$



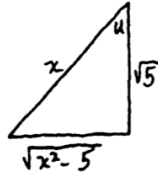
2. $\sqrt{3-x^2} = \sqrt{3} \cos u$, $x = \sqrt{3} \sin u$, $dx = \sqrt{3} \cos u du$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{3} \cos u}{3 \sin^2 u} \sqrt{3} \cos u du &= \int \cot^2 u du \\ &= -\cot u - u + C \quad (\text{공식 42}) \\ &= -\frac{\sqrt{3-x^2}}{x} - \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$



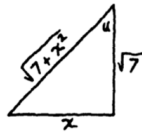
3. $\sqrt{x^2-5} = \sqrt{5} \tan u$, $x = \sqrt{5} \sec u$, $dx = \sqrt{5} \sec u \tan u du$

$$\int \frac{\sqrt{5} \sec u \tan u du}{5 \sec^2 u \sqrt{5} \tan u} = \frac{1}{5} \int \cos u du = \frac{1}{5} \sin u + C = \frac{1}{5} \frac{\sqrt{x^2-5}}{x} + C$$



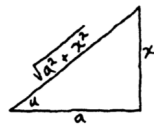
4. $\sqrt{7+x^2} = \sqrt{7} \sec u$, $(7+x^2)^2 = (\sqrt{7} \sec u)^4 = 49 \sec^4 u$, $x = \sqrt{7} \tan u$, $dx = \sqrt{7} \sec^2 u du$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{7} \sec^2 u du}{49 \sec^4 u} &= \frac{1}{7\sqrt{7}} \int \cos^2 u du \\ &= \frac{1}{7\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} (u + \sin u \cos u) + C \\ &= \frac{1}{14\sqrt{7}} \left(\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{7}} + \frac{x\sqrt{7}}{7+x^2} \right) + C \end{aligned}$$



5. $x = a \tan u$, $dx = a \sec^2 u du$, $\sqrt{a^2+x^2} = a \sec u$

$$\int \frac{a \sec^2 u du}{(a \sec u)^3} = \frac{1}{a^2} \int \cos u du = \frac{1}{a^2} \sin u + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C$$



7.8 적분 방법 선택

1. $u = \sqrt{x}$ 라고 하면 $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ 이므로 $\int 2 \sin u du = -2 \cos u + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$
2. $u = 1 - x^2$ 라고 하면 $du = -2x dx$ 이므로 $-\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} u^{-2} + C = \frac{1}{4(1-x^2)^2} + C$
3. $\sqrt{2x+3} + C$
4. $u = x - 1$ 이라 하면 $du = dx$ 이므로 $\int (u+1)u^{20} du = \frac{1}{22}u^{22} + \frac{1}{21}u^{21} + C = (x-1)^{21}(\frac{1}{22}(x-1) + \frac{1}{21}) + C$ 또는 $u = x, dv = (x-1)^{20} dx$ 로 두고 부분적분을 한다.
5. $\int (x+1)dx + \int \frac{2}{x+1}dx = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \ln|x+1| + C$
6. $u = 4 - x^2$ 이라 하면 $du = -2x dx$ 이므로 $-\frac{1}{2} \int 1/\sqrt{u} du = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{4-x^2} + C$
7. $x^2 + 9x + C$
8. 부분분수분해를 하면 $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$. 그러므로 역도함수는 $\ln|x| - \ln|1+x| + 1/(1+x) + C$
9. $\int 2/(1+x)dx - \int dx = 2 \ln|1+x| - x + C$
10. $\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} = \frac{(1 - \sin^2 x)^2}{\sin^2 x} = \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x} = \csc^2 x - 2 + \sin^2 x = \csc^2 x - 2 + \frac{1 - \cos 2x}{2}$
이므로 역도함수는 $-\cot x - 2x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
11. $\int_C \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x \cdot (1 - \cos^2 x)}{\cos x} dx = \int \tan x dx - \int \sin x \cos x dx = -\ln|\cos x| + \frac{1}{2} \cos^2 x + C$
12. 아래 그림과 같은 삼각치환법을 사용한다. $\sqrt{2x^2 - 4} = 2 \tan u, \frac{\sqrt{2}}{x} = \cos u, \frac{dx}{x^2} = \frac{\sin u}{\sqrt{2}} du$.
그러므로

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sqrt{2x^2 - 4}}{x^2} dx &= \int 2 \tan u \cdot \frac{\sin u}{\sqrt{2}} du \\
 &= \sqrt{2} \int \frac{\sin^2 u}{\cos u} du \\
 &= \sqrt{2} \int \frac{1 - \cos^2 u}{\cos u} du \\
 &= \sqrt{2} \int (\sec u - \cos u) du \\
 &= \sqrt{2} (\ln|\sec u + \tan u| - \sin u) + C \\
 &= \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| - \frac{\sqrt{2x^2 - 4}}{x} + C
 \end{aligned}$$

13. $u = \sec x, dv = \sec^2 x dx$ 라고 두면 $du = \sec x \tan x dx, v = \tan x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx
 \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} 2 \int \sec^3 x dx &= \sec x \tan x + \int \sec x dx \\ &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

즉

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + K$$

14. $u = x^2$ 이라고 하면 $-\frac{1}{2} \cos x^2 + C$

15. $u = \sec^2 x, dv = \sec^2 x dx$ 라고 두면 $du = 2 \sec^2 x \tan x, v = \tan x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x dx &= \sec^2 x \tan x - 2 \int \sec^2 x \tan^2 x dx \\ &= \sec^2 x \tan x - \frac{2}{3} \tan^3 x + C \end{aligned}$$

16. $\frac{1}{3} e^{3x} + C$

17. $-\frac{1}{5} \cos 5x + C$

18. $u = 2 - r^2$ 이라 하면, $-\frac{1}{3} (2 - r^2)^{3/2} + C$

19. $\int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

20. $\int (2 + 3/x) dx = 2x + 3 \ln |x| + C$

21. $\int \sin 3x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 5x + \sin x) dx = -\frac{1}{2} [\frac{1}{5} \cos 5x + \cos x] + C$

22. $-\frac{1}{2} \pi \cos(2x/\pi) + C$

23. $\frac{1}{5} \ln |5x - 2| + C$

24. $u = x^2 + 7$ 이라고 하면 $\int \cancel{x^2} \sqrt{x^2 + 7} dx = \int (u - 7) \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} (\frac{2}{5} u^{5/2} - 7 \cdot \frac{2}{3} u^{3/2}) + C =$
 $u \sqrt{u} (\frac{1}{5} u - \frac{7}{3}) + C = (x^2 + 7) \sqrt{x^2 + 7} (\frac{1}{5} (x^2 + 7) - \frac{7}{3}) + C$

25. $u = \sin^{-1} x, dv = x dx$ 라고 하면 $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = \frac{1}{2} x^2$ 이므로

$$\int x \sin^{-1} x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

두 번째 항에 대해 $\sqrt{1-x^2} = \sin u$ 로 두면 $x = \cos u$ 이고 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \cos^2 u du = -\int \frac{1+\cos 2u}{2} du =$
 $-\frac{1}{2} (u + \frac{1}{2} \sin 2u) + C = -\frac{1}{2} (u + \sin u \cos u) + C$. 따라서

$$\begin{aligned} \int x \sin^{-1} x dx &= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x + \frac{1}{4} (\sin^{-1} \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-x^2}) + C \end{aligned}$$

26. $\frac{1}{2} e^{x^2} + C$

27. $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = \int (\sec x - \cos x) dx = \ln |\sec x + \tan x| - \sin x + C$

28. $u = e^x$ 이라 하면 $du = e^x dx$. 따라서 $\int 1/(e^x + e^{-x}) dx = \int \frac{1/u}{u + 1/u} du = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \tan^{-1} u + C = \tan^{-1} e^x + C$

29. $\int \sqrt{x^2 - x + 3} dx = \int \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}}$

30. $u = 4x + 5$ 라고 하면 $\int 7 \ln(4x + 5) dx = \frac{7}{4} \int \ln u du = \frac{7}{4} [u \ln u - u] + C = \frac{7}{4} (4x + 5) \ln(4x + 5) - \frac{7}{4} (4x + 5) + C$.

31. $\sqrt{3x^2 - 1} = \tan u$ 라고 하면 $\sqrt{3}x = \sec u, \sqrt{3}dx = \sec u \tan u du$ 이므로

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{3x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{3} \sec^2 u \tan u \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \sec u \tan u du \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \int \sec^3 u \tan^2 u du \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \int \sec^3 u (\sec^2 u - 1) du \\ &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\int \sec^5 u du - \int \sec^3 u du \right] \end{aligned}$$

$\int \sec^5 u du$ 를 구해보자. $u = \sec^3 x, dv = \sec^2 x dx$ 로 두면 $du = 3 \sec^3 x \tan x dx, v = \tan x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x dx &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^3 x \tan^2 x dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^3 x (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec^3 x \tan x - 3 \int \sec^5 x dx + 3 \int \sec^3 x dx \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} 4 \int \sec^5 x dx &= \sec^3 x \tan x + 3 \int \sec^3 x dx \\ &= \sec^3 x \tan x + \frac{3}{2} [\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C \end{aligned}$$

즉

$$\int \sec^5 u du = \frac{1}{4} \sec^3 u \tan u + \frac{3}{4} \int \sec^3 u du$$

이므로

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{3x^2 - 1} dx &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[\frac{1}{4} \sec^3 u \tan u - \frac{1}{4} \int \sec^3 u du \right] \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}} \sec^3 u \tan u - \frac{1}{24\sqrt{3}} [\sec u \tan u + \ln |\sec u + \tan u|] + C \\ &= \frac{1}{12\sqrt{3}} 3\sqrt{3}x^3 \sqrt{3x^2 - 1} - \frac{1}{24\sqrt{3}} [\sqrt{3}x \sqrt{3x^2 - 1} + \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 1}|] + C \\ &= \frac{1}{4} x^3 \sqrt{3x^2 - 1} - \frac{1}{24\sqrt{3}} [\sqrt{3}x \sqrt{3x^2 - 1} + \ln |\sqrt{3}x + \sqrt{3x^2 - 1}|] + C \end{aligned}$$

32. $u = \sin x$ 라고 하면 $du = \cos x dx$ 이고 $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x (\cos x dx) = \int (1 - u^2) u^2 du = \int (u^2 - u^4) du = \frac{1}{3} u^3 - \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C$

33. $u = \cos x$ 라고 하면 $du = -\sin x dx$ 이고 $\int \sin^5 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 dx = -\int (1 - u^2)^2 du = -\int (u^4 - 2u^2 + 1) du = -\frac{1}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 - u + C = -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

34. 부분분수분해를 하면 $\frac{x}{(x^2-5)(1-x)} = \frac{-\sqrt{5}+1}{8} \cdot \frac{1}{x+\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}+1}{8} \cdot \frac{1}{x-\sqrt{5}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1}$
 이므로

$$\int \frac{x}{(x^2-5)(1-x)} dx = \frac{-\sqrt{5}+1}{8} \ln|x+\sqrt{5}| + \frac{\sqrt{5}+1}{8} \ln|x-\sqrt{5}| - \frac{1}{4} \ln|x-1| + C$$

35. $u = e^{2x}, dv = \sin 3x dx$ 라고 하면 $du = 2e^{2x} dx, v = -\frac{1}{3} \cos 3x$ 이므로

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x dx$$

다시 $u = e^{2x}, dv = \cos 3x dx$ 라고 하면 $du = 2e^{2x} dx, v = \frac{1}{3} \sin 3x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int e^{2x} \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x dx \right] \\ &= -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x dx \end{aligned}$$

그러므로

$$\int e^{2x} \sin 3x dx = \frac{9}{13} \left[-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x \right] = -\frac{3}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{13} e^{2x} \sin 3x$$

36. $\frac{x+4}{(2x-1)(x+1)} = \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+1}$ 이므로 $\int \frac{x+4}{2x^2+x-1} dx = \frac{3}{2} \ln|2x-1| - \ln|x+1| + C$

37. $u = (\ln x)^3, dv = dx$ 이면 $du = 3(\ln x)^2 \cdot dx/x, v = x$ 이므로 $\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3 \int (\ln x)^2 dx$. 다시 $u = (\ln x)^2, dv = dx$ 라고 하면 $du = 2(\ln x) \cdot dx/x, v = x$ 이므로 $\int (\ln x)^3 dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6 \int x \ln x dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C$.

38. $u = x^3, dv = \sin x dx$ 라고 하면 $du = 3x^2 dx, v = -\cos x$ 이므로 $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx$. 다시 $u = x^2, dv = \cos x dx$ 라고 하면 $du = 2x dx, v = \sin x$ 이고 따라서 $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \int x \sin x dx$. 다시 한 번 $u = x, dv = \sin x dx$ 라고 하면 $du = dx, v = -\cos x$ 이므로 $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - \int \cos x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$

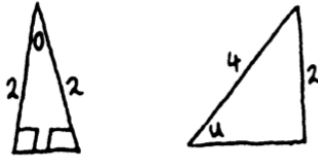
7.9 역미분 기법과 기본정리

1. (a) $du = 3dx, \int_2^5 \sin^5 x dx = \frac{1}{3} \int_6^{15} \sin^5 \frac{1}{3} u du$

(b) $du = \frac{1}{x} dx, \int_1^{e^3} \sin(\ln x) dx = \int_0^3 \sin u \cdot x du = \int_0^3 e^u \sin u du$

(c) $x = 2 \csc u, dx = -2 \csc u \cot u du, \sqrt{x^2-4} = 2 \cot u$. $x = 2$ 이면 $u = \pi/2$ 이고 $x = 4$ 이면 $u = \pi/6$ 이다. (아래 그림 참조)

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx = \int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{2 \cot u}{4 \csc^2 u} \cdot -2 \csc u \cot u du = - \int_{\pi/2}^{\pi/6} \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = \frac{\cos^2 u}{\sin u} du$$



2. (a) $u = 3x^2 - 1$ 이라고 하면 $du = 6xdx$ 이고

$$\frac{1}{6} \int_{11}^{47} u^{10} du = \frac{1}{6} \frac{1}{11} u^{11} \Big|_{11}^{47} = \frac{1}{66} (47^{11} - 11^{11})$$

- (b) $u = e^{-x}, dv = \cos x dx$ 로 두고 부분적분을 하면

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx = \int_0^\infty e^{-x} \sin x dx$$

다시 한번 $u = e^{-x}, dv = \sin x dx$ 로 두고 부분적분을 하면

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$$

그런데 $-e^{-x} \cos x \Big|_0^\infty = 1$ 이므로 $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2}$

- (c) $u = \ln x$ 라고 하면 $du = \frac{1}{x} dx$ 이므로

$$\int_0^1 u^5 du = \frac{1}{6} u^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

- (d) 공식 52(a)를 사용하면

$$-\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x \Big|_{\pi/2}^\pi + \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^\pi \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (x + \sin x \cos x) \Big|_{\pi/2}^\pi = \pi/16$$

- (e) $u = x^3$ 이라고 하면 $du = 3x^2 dx$ 이고

$$\int_{-\infty}^2 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^8 e^u du = \frac{1}{3} e^8$$

- (f) $u = x^2 + 4$ 라고 하면 $du = 2x dx$ 이고

$$\frac{1}{2} \int_4^8 \sqrt{u} du = \frac{1}{3} u^{3/2} \Big|_4^8 = \frac{8\sqrt{8}}{3} - \frac{8}{3}$$

3. (a) $u = 1 - x$ 라 하면 $du = -dx$ 이고

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^m (1-x)^n dx &= - \int_1^0 (1-u)^m u^n du \\ &= \int_0^1 (1-u)^m u^n du \\ &= \int_0^1 (1-x)^m x^n dx \end{aligned}$$

- (b) $u = x + 20$ 이라고 하면 $u = dx$ 이고

$$\int_0^{10} (x+20)^2 dx = \int_{20}^{30} u^2 du = \int_{20}^{30} x^2 dx$$

(c) $u = \frac{1}{2}x$ 라고 하면 $du = \frac{1}{2}dx$ 이고

$$\int_{2a}^{2b} \sqrt{\sin \frac{1}{2}x} dx = 2 \int_a^b \sqrt{\sin u} du = 2 \int_a^b \sqrt{\sin x} dx$$

4. $u = \ln \ln x, dv = x dx$ 라고 두면 $du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx, v = \frac{1}{2}x^2$ 이고

$$\int_2^3 \ln \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln \ln x \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx = \frac{9}{2} \ln \ln 3 - 2 \ln \ln 2 - \frac{1}{2}k$$